

# TD2 : Nombres complexes

## Nombre complexe - Forme cartésienne

### Exercice 1

Mettre les nombres suivants sous la forme  $a + ib$  où  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

1.  $(5 - i)(7 + 2i)$

2.  $(i - 1)(3 + 7i)$

3.  $(1 + i)^2$

4.  $(1 + i)^4$

5.  $\frac{1}{1 - i}$

6.  $\frac{i}{1 + 2i}$

7.  $\frac{3 + 6i}{4 - 2i}$

8.  $\frac{7 - 8i}{9 + 4i} + \frac{7 + 8i}{9 - 4i}$

### Exercice 2

Déterminer le nombre conjugué des nombres complexes suivants.

1.  $3 - 4i$

2.  $\sqrt{7}i - \sqrt{2}$

3.  $(1 + i)^2$

4.  $\frac{1}{1 - i}$

5.  $\frac{i}{1 + i}$

6.  $\frac{3 + 6i}{4 - 2i}$

7.  $\frac{7 - 8i}{9 + 4i} + \frac{7 + 8i}{9 - 4i}$

### Exercice 3

Soient  $z_1 = 7 + 15i$  et  $z_2 = -9 + i$ . Déterminer la partie imaginaire de  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_1 + z_2$ ,  $\overline{z_1} \times z_2$  et  $\frac{z_2}{z_1}$ .

### Exercice 4

Déterminer les racines des polynômes suivants dans  $\mathbb{C}$ .

1.  $x^2 + x + 1$

2.  $x^2 - x + 1$

3.  $2x^2 + 4x + 2$

4.  $-x^2 + 2x - 3$

5.  $x^2 + 1$

6.  $x^2 + 3x + 1$

### Exercice 5

Déterminer les racines carrés des nombres complexes suivants.

1. 1

2.  $i$

3.  $3 + 4i$

4.  $8 - 6i$

5.  $7 + 24i$

6.  $-1$

### Exercice 6

Déterminer les racines des polynômes suivants dans  $\mathbb{C}$ .

1.  $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1$

2.  $z^2 - \sqrt{3}z - i$

3.  $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12)$

4.  $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i$

5.  $z^4 + 10z^2 + 169$

6.  $z^4 + 2z^2 + 4$

## Nombre complexe - Forme polaire

### Exercice 7

Mettre les nombre suivants sous forme cartésienne.

1.  $e^i$

2.  $e^{1+i}$

3.  $e^{i\vartheta} + e^{2i\vartheta}$  où  $\vartheta \in \mathbb{R}$ .

4.  $\frac{1}{1 + e^{i\frac{\pi}{4}}}$

### Exercice 8

Mettre les nombre suivants sous forme polaire.

1.  $i - \sqrt{3}$

2.  $\sqrt{2}(1 - i)$

3.  $7 + 7i$

4.  $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$

### Exercice 9

Déterminer le module et l'argument des nombres suivants.

1. 1

2. -1

3.  $i$

4.  $-i$

5.  $1 + i$

6.  $1 - i$

7.  $\sqrt{12} - 2i$

8.  $e^i$

9.  $e^{1+i}$

10.  $ie^{i\frac{\pi}{4}}$

11.  $1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

12.  $i + e^{\frac{\pi}{4}}$

### Exercice 10

Calculer le module et l'argument des nombres  $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$  et  $v = 1 - i$ . En déduire le module et l'argument de  $\frac{u}{v}$ .

### Exercice 11

Soient  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ .

1. Écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme algébrique.

2. En déduire la forme exponentielle et cartésienne de  $z_1 z_2$ .

3. En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

### Exercice 12

Soient  $\vartheta \in \mathbb{R}$  et  $z = e^{i\vartheta}$ . Déterminer le module et l'argument de  $1 + z$  et  $1 + z + z^2$ .

### Exercice 13

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de  $\frac{1}{1 + e^{i\alpha}}$  où  $\alpha \in [0; \pi[$ .

**Exercice 14**

Déterminer la partie réelle, la partie imaginaire, le module et l'argument de  $\frac{1}{1 - e^{i\alpha}}$  où  $\alpha \in ]0; \pi]$ .

**Exercice 15**

1. Calculer le module et l'argument de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .
2. Calculer les racines carrées de  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .
3. En déduire les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .
4. En raisonnant de la même manière, trouver les valeurs de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

**Exercice 16**

Linéariser les expressions suivantes ( $\vartheta \in \mathbb{R}$ ).

- |   |   |                                       |
|---|---|---------------------------------------|
| 1. $\cos^2(\vartheta)$                  | 4. $\cos(\vartheta)\sin^3(\vartheta)$   | 7. $\cos(\vartheta)\sin^4(\vartheta)$ |
| 2. $\sin^2(\vartheta)$                  | 5. $\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)$   | 8. $\sin^5(\vartheta)$                |
| 3. $\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta)$ | 6. $\cos^2(\vartheta)\sin^3(\vartheta)$ | 9. $\cos^6(\vartheta)$                |

**Exercice 17**

Délinéariser les expressions suivantes ( $\vartheta \in \mathbb{R}$ ).

- |                       |                       |                       |                       |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $\cos(2\vartheta)$ | 2. $\sin(3\vartheta)$ | 3. $\cos(4\vartheta)$ | 4. $\sin(5\vartheta)$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|